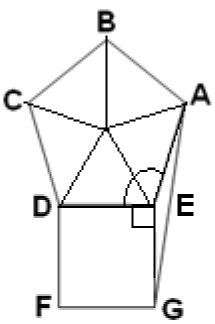
X OLIMPIADA DE LA CIENCIA **FASE ZONAL 2014**
MATEMÁTICAS **CLAVE DE RESPUESTAS**

1. La cantidad total de palitos que se necesitan es mínima cuando el número de palitos de 7 cm es máximo. Como $200 = 28 \times 7 + 4 = 26 \times 7 + 3 \times 6,$ el número mínimo de palitos es 29: 26 palitos de 7 cm y 3 de 6 cm.

2. Sabemos que los ángulos de cada uno de los triángulos que forman el pentágono miden: 72º, 54º y 54º.



Entonces $\angle AEG = 360^\circ - 2\left(54^\circ\right) - 90^\circ = 162^\circ.$ Como el triángulo AEG es isósceles, los ángulos de la base miden lo mismo, luego $2\left(\angle GAE\right) + 162^\circ = 180^\circ$, de donde $\angle GAE = 9^\circ.$

3. **Primera solución.** En el primer lanzamiento debemos obtener un número entre 1 y 4. Luego, la probabilidad es $\frac{4}{6}$. En el siguiente lanzamiento, debemos obtener un número que sumado con el primer número nos de cinco, entonces la probabilidad es $\frac{1}{6}$. Por lo tanto, la probabilidad de obtener como suma 5 es $\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$

Segunda solución. Como el dado se lanza dos veces, hay 36 distintos resultados. Las únicas combinaciones que suman 5 son (1,4), (2,3), (3,2) y (4,1). Por lo tanto, la probabilidad de obtener una suma de 5 es $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

4. La mujer dijo que el producto de las edades de sus hijas era 36. Las factorizaciones de 36 como producto de tres números naturales son:

- 1 X 1 X 36, la suma de los factores es 38.
- 1 X 2 X 18, la suma de los factores es 21.
- 1 X 3 X 12, la suma de los factores es 16.
- 1 X 4 X 9, la suma de los factores es 14.
- 1 X 6 X 6, la suma de los factores es 13.
- 2 X 2 X 9, la suma de los factores es 13.
- 2 X 3 X 6, la suma de los factores es 11.
- 3 X 3 X 4, la suma de los factores es 10.

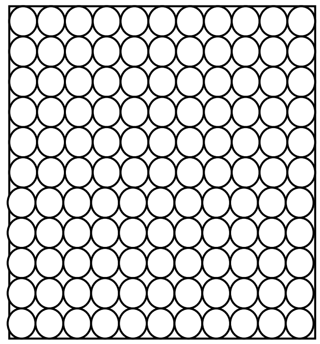
Observe que excepto por los casos 1 X 6 X 6 y 2 X 2 X 9, en el resto de las factorizaciones las sumas de los factores son diferentes. Ahora, como el encuestador (que conoce el número de la casa) dice que hacen falta datos, la única posibilidad es que el número de la casa sea 13. Después, para eliminar la ambigüedad la señora responde que a la mayor le gusta el chocolate, esto nos indica que hay una niña que es mayor que las otras dos y por lo tanto la única solución posible es que las edades de las hijas sean: 2, 2 y 9.

5. Si un punto latice tiene coordenadas (m,n) donde m y n son números enteros y están en la circunferencia $x^2+y^2=25$, entonces $m^2+n^2=25$. Como m y n son enteros y $m^2\geq 0$, entonces n^2 está en $\{0,1,4,9,16,25\}$. Por simetría esto también es cierto para m^2.

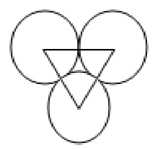
- Si $n^2=1$ o $n^2=4$, entonces m^2 no puede ser un cuadrado perfecto y no tenemos un punto latice.
- Si $n^2=0$ entonces $n=0$ y $m^2=25$, que nos da $m=\pm 5$, es decir, obtenemos los puntos latice $(-5,0)$ y $(5,0)$.
- Si $n^2=9$ entonces $n=\pm 3$ y $m^2=25-9=16$, que nos da $m=\pm 4$. Luego, obtenemos los puntos latice $(-4,-3)$, $(-4,3)$, $(4,-3)$ y $(4,3)$.
- Si $n^2=16$ entonces $n=\pm 4$ y $m^2=25-16=9$, que nos da $m=\pm 3$. Luego, obtenemos los puntos latice $(-3,-4)$, $(-3,4)$, $(3,-4)$ y $(3,4)$.
- Si $n^2=25$ entonces $n=\pm 5$ y $m^2=0$, que nos da $m=0$, es decir, obtenemos los puntos latice $(0,-5)$ y $(0,5)$.

Por lo tanto, en total tenemos 12 puntos latice en la circunferencia.

6. La primera idea que nos viene a la mente es hacer 11 filas de 11 monedas cada una, pero de esta forma, podríamos acomodar únicamente $11\times 11=121$ monedas y no nos quedaría espacio para más monedas.

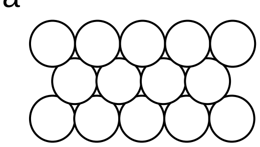


Una segunda idea es colocar las monedas de la siguiente forma:



formando un triángulo equilátero de altura $h=\sqrt{3}$ cm. Entonces estaremos ocupando 1 cm arriba, 1 cm abajo y la distancia h la podremos utilizar a lo más $n=\dfrac{22-2}{h}\approx 11.547$ veces, es decir, 11 veces. Esto equivale a 12 renglones (6 de 11 monedas y 6 de 10 monedas), lo cual nos dará un total de 66 + 60 = 126 monedas, pero tenemos que acomodar 128. Observemos que por este método nos sobrará un poco de espacio en la parte inferior o superior del cuadrado.

La tercera idea, es colocar dos renglones seguidos de 11 monedas, esto nos hace perder un poco de espacio vertical pero aumentamos una moneda. Tenemos que $128=8\times 11+4\times 10=4\left(2\times 11+10\right)$, de donde la idea es repetir 4 veces el patrón que se muestra en la siguiente figura



La altura es $2h+2=2\left(\sqrt{3}+1\right)$, el cual cabe perfectamente, ya que $4\times 2\left(\sqrt{3}+1\right)\approx 21.856<22$, luego, las monedas quedarían acomodadas de la siguiente manera: